SCHIAVONI

LIVELLAZIONE

TRA IL MAR TIRRENO

E L'ADRIATICO

N.- 42

PROGETTO

DI UNA LIVELLAZIONE GEODETICA

TRA IL MAR TIRRENO E L' ADRIATICO.

Tra i lavori lasciatici dal valentissimo signor Fergola, Capitano del Real Corpo del Genio, vi ha una livellazione geodetica fra Torre di Termoli e l'Osservatorio Topografico, la quale fornita com'è dell'altezza diretta di ciascun punto estremo sul mar sottoposto, potrebbe determinare la differenza di livello tra l'Adriatico ed il Tirreno, se per avventura non fosse basata su triangoli molto grandi, e su di osservazioni reciproche non contemporanee: ciò che la rende soggetta ad errori inevitabili non molto piccoli precipuamente a causa della refrazione. Però comunque il lavoro di Fergola non possa garentire la differenza di livello dei due mari, e giustamente poichè non istituito a tale scopo, pure, recato innanzi per quattro vie diverse, ci mostra con accordo maraviglioso, che l' altezza diretta di Torre di Termoli è maggiore di quella derivata dall' Osservatorio Topografico, ed in conseguenza che il livello dell' Adriatico è più basso di quello del Tirreno. Ora un fatto così contrario al principio, che i mari stretti hanno un livello più elevato dei larghi mari con cui sono comunicanti [1], mi menava all' idea d' istituire tra il Tirreno e l' Adriatico una livellazione molto rigorosa, la quale soddisfi nel tempo medesimo alle quattro condizioni qui esposte:

[1] Encycl. Metrop. Tides and Waves p. 377, e Philos. Trans. parte 1.ª 1845.

1.° di porre a luce la questióne importante se tra i due mari sievi differenza di livello ;

2.° di offerire uno studio esatto delle loro maree contemporanee; giacchè noi manchiamo di un preciso paragone, comunque instrutti che quelle dell'Adriatico sieno molto maggiori [1] ;

3.° di studiare le refrazioni terrestri, derivandole non solo da misure zenitali , ma ancora da osservazioni barometriche e termometriche ;

4.° di presentare le variazioni che il coefficiente di refrazione assume in conseguenza della pressione e temperatura atmosferica, onde applicarlo alle misure zenitali non contemporanee e dedurne differenze di livello possibilmente esatte.

Ho voluto poi di questo mio pensiero farne il soggetto di poche pagine, ove ho tracciato non solo i mezzi di ricerca da me creduti più idonei, ma indicato ancora il grado di esattezza che essi potrebbero garentire.

Una livellazione geodetica tra due mari non è da reputarsi idea nuova, poichè tra i molti lavori di questa natura avvene uno stato eseguitó da Coraboeuf tra il Mediterraneo e l'Oceano [2], ed un altro menato a fine dai professori Fuss Sawitsch e Sabler tra il Mar Nero e il Caspio. Però il progetto che noi verremo tracciando discostasi affatto dai due menzionati; nè può essere altramente, giacchè se tra il Tirreno e l'Adriatico esiste una differenza di livello, essa sarà una quantità molto piccola, la quale potrebbe essere occultata se non altro dagli errori di strumenti, di osservazioni e di refrazione; quindi i mezzi da impiegarsi bisogna che sieno speciali e delicati molto onde sperare di cogliere lo scopo.

In generale una livellazione Geodetica istituita ad oggetto di

[1] Le osservazioni di Toaldo (Philos. Trans. 1777) ci dimostrano che a Venezia la differenza tra la bassa ed alta marea giunge sino a 4 piedi, mentre sulle coste del Tirreno essa giunge appena ad 1 piede.

[2] Si noti che nella livellazione indicata fu oggetto secondario il ricercare la differenza di livello de' due mari, altramente l'illustre Geografo avrebbe usato metodi che meglio garentissero la delicatezza della questione.

assegnare la differenza di livello tra due mari ha per fondamento la determinazione esatta del livello medio di un mare rispetto al primo punto della rete, e del mare opposto rispetto all' ultimo punto; ed inoltre la rigorosa livellazione tra gli estremi della rete stessa, operazione questa difficile a conseguirsi, perchè svariate cause di diversa natura contribuiscono ad affettarla di errori. Ciò posto le proprietà generali di cui deve godere la livellazione da noi ideata tra il Tirreno e l' Adriatico sono le seguenti:

1.° Essa deve procedere tra un mare e l'altro per la linea, la quale sia nel tempo stesso la più breve e la meno ondulata: la più breve acciò vi sieno minori osservazioni a farsi, e quindi minor numero di errori: la meno ondulata, e perchè gli errori dei lati dei triangoli abbiano minore influenza sulla livellazione, e perchè sia più rigorosa l' ipotesi che tra due punti reciproci di osservazioni zenitali la traiettoria luminosa ha gli estremi di egual curvatura tra punti vicini [1].

2.° Oltre a ciò, supposto la linea di operazione esser quella che distendendosi tra Napoli e Manfredonia ha lo sviluppamento di circa 85 miglia, bisogna non solo che la rete ordita tra questi due punti, la quale serve di base alla livellazione, abbia bastante esattezza, ma pure che i lati dei triangoli abbiano la lunghezza media di 12 miglia, onde con 12 triangoli si passi da un mare all' altro senza temere che le distanze zenitali osservate agli estremi di ogni lato abbiano gli angoli di refrazione disuguali.

3.° Che la livellazione anzidetta sia di estrema precisione, cioè menata avanti con grandi e buoni strumenti; elioscopii; eccellenti metodi di osservazione, e sia basata su di misure zenitali reciproche e contemporanee eseguite da tre valenti operatori ai vertici di ogni triangolo, in diverse ore e giorni. Inoltre fa d'uopo che tale livellazione sia accompagnata da una serie di osservazioni barometriche e termometriche contemporanee, se, come indicammo, vogliansi le variazioni del coefficiente di refrazione e nello stesso tempo uno studio sulle refrazioni terrestri.

[1] Nelle livellazioni geodetiche si muove ordinariamente dall' ipotesi che la traiettoria luminosa tra due punti reciproci abbia egual curvatura ai suoi estremi; ciò non è vero, se non se nel caso speciale che i due punti sieno tra loro poco distanti, e poco differenti di livello.

4.° Infine si deve basare la livellazione in parola ad esatte e contemporanee osservazioni di maree circoequinoziali eseguite in primavera ed in autunno agli estremi del lavoro, ed a questi ben collegate.

Nè tutto ciò è bastevole per ottenere la precisione che da noi si richiede, poichè alle norme generali ora esposte bisogna aggiungere ancora altri particolari mezzi, onde menomare gli errori inevitabili, i quali non sono di piccolo momento per la ricerca che ci proponiamo. Epperò al proposito faremo notare che gli errori, i quali possono incontrarsi in una livellazione rigorosissima ed alterare i risultamenti, hanno origine dalle seguenti cause:

I. dagli errori, che presentano gli strumenti nella graduazione dei lembi, nella flessione dei cannocchiali ec.:

II. dagli errori di correzione degli strumenti:

III. dagli errori di puntatura e di lettura commessi dall'operatore nelle misure zenitali:

IV. dagli errori che introduce il coefficiente di refrazione adottato:

V. dall'errore esistente nella distanza orizzontale di due punti tra quali si eseguono misure zenitali:

VI. dagli errori cui van soggette le stesse osservazioni di maree, i quali influiscono sull'altezza diretta di un punto fisso rispetto al livello medio del mare sottoposto. Indichiamo ora i mezzi come diminuire cosiffatti errori ed apprezzarli.

Non avendo noi a dire nulla di nuovo sugli errori della I.ª e II.ª specie, assumeremo i primi essere stati studiati su tutti e tre gli strumenti da adoperarsi, coi metodi indicati da Gauss e da Bessel, lo che ci porrà in grado di eliminarne possibilmente l'influenza; e che i secondi sieno diminuiti mercè le buone condizioni; i metodi di osservazione; e l'esattezza.

Quanto poi agli errori della IIIª e IVª specie noi vorremmo che le condizioni atmosferiche in cui si eseguono le misure zenitali, non escano dai limiti qui indicati: cioè di oggetti *distinti* o *quasi distinti; immobili* o *poco oscillanti*, e con atmosfera in istato di *calma*, o di *poco vento;* ciò che ci produrrà il vantaggio di restringere considerabilmente gli errori, che ciascun operatore incontra. Anzi chiederemmo ancora che tutti e tre gli operatori

forniti de' proprii strumenti, prima d'intraprendere le osservazioni effettive, si assoggettino alla seguente pruova: cioè dallo stesso luogo di osservare contemporaneamente il medesimo segnale [1], distante da loro per circa 12 miglia, e, usando i metodi più adatti e la massima diligenza, di misurare molte serie con oggetti distinti, quasi distinti; immobili, poco oscillanti; con calma e con poco vento; la qual cosa ci condurrà a trovare l'errore medio di ciascun operatore in ognuna delle condizioni enunciate a dedurne poi:

a) il numero delle osservazioni sfavorevoli che equilibra il numero delle favorevoli eseguite dallo stesso operatore:

b) il numero di osservazioni che un operatore deve fare per equilibrare quelle di un altro nelle stesse condizioni:

c) il numero di osservazioni che un operatore deve fare per equilibrare l'esattezza delle osservazioni da un altro eseguite in diverse condizioni.

Dietro di che, stabilito il numero di osservazioni che ciascun operatore deve fare acciò in ogni condizione sievi equilibrio, noi avremo i mezzi di regolare le osservazioni effettive da potersi trattare come quantità di egual peso, e di ottenere maggiore esattezza, e minore difficoltà di calcolo.

Ciò posto moviamo dalle condizioni qui espresse:

In un triangolo ABC (*fig. 1*), ai cui vertici si eseguono le osservazioni zenitali contemporanee, i lati AB, AC, BC li chiameremo rispettivamente l_1, l_2, l_3; indicheremo con z_1, la distanza zenitale di B in A, e con z'_1, la reciproca; noteremo ancora con z_2 la distanza zenitale di C in A, e con z'_2 la reciproca: finalmente con z_3 la distanza zenitale di C in B e con z'_3 la reciproca. — Nella stazione A esprimeremo per c_1 l'altezza del segnale sul centro dello strumento quando si osserva B: per c'_1 lo stesso elemento in B, quando si osserva A ecc. In ultimo chiameremo h_1 la differenza di livello tra A e B ottenuta dalle osservazioni fatte in A; h'_1 la stessa quantità dedotta dalle osservazioni eseguite in B e così via. Adunque le differenze di livello tratte dalle osservazioni eseguite

[1] S'intende che al segnale osservato il punto di mira sia un elioscopio.

ai tre punti potranno così esprimersi

$$(1)\dots\begin{cases} h_1=c_1+l_1\cot(z_1-\beta l_1)\dots\dots\dots & \text{da A osservato B} \\ h'_1=c'_1+l_1\cot(z'_1-\beta l_1)\dots\dots\dots & \text{reciproca} \\ h_2=c_2+l_2\cot(z_2-\beta l_2)\dots\dots\dots & \text{da A osservato C} \\ h'_2=c'_2+l_2\cot(z'_2-\beta l_2)\dots\dots\dots & \text{reciproca} \\ h_3=c_3+l_3\cot(z_3-\beta l_3)\dots\dots\dots & \text{da A osservato C} \\ h'_3=c'_3+l_3\cot(z'_3-\beta l_3)\dots\dots\dots & \text{reciproca} \end{cases}$$

Or se la refrazione riguardasi come costante per lo spazio di un ora, e si voglia porre a calcolo una serie di osservazioni eseguite in questo tempo, devesi β considerare costante. Però siccome noi non conosciamo il coefficiente di refrazione esatto, così, usandone uno approssimato, nelle equazioni antecedenti le h, le z, e le β saranno affetti da piccoli errori; quindi se chiamiamo H, Z e B, le quantità esatte a queste corrispondenti; avremo tra le quantità esatte le relazioni

$$\varphi_1 = \mathrm{H}_1 + \mathrm{H}'_1\dots\dots = 0$$
$$\varphi_2 = \mathrm{H}_2 + \mathrm{H}'_2\dots\dots = 0$$
$$\varphi_3 = \mathrm{H}_3 + \mathrm{H}'_3\dots\dots = 0$$
$$\varphi_4 = \mathrm{H}_2 + \mathrm{H}_3 + \mathrm{H}'_1 = 0\ ,$$

ossia

$$(2)\dots\begin{cases} \varphi_1=c_1+l_1\cot(\mathrm{Z}_1-\mathrm{B}l_1)+c'_1+l'_1\cot(\mathrm{Z}'_1-\mathrm{B}l_1)\dots\dots\dots\dots\dots=0 \\ \varphi_2=c_2+l_2\cot(\mathrm{Z}_2-\mathrm{B}l_2)+c'_2+l_2\cot(\mathrm{Z}'_2-\mathrm{B}l_2)\dots\dots\dots\dots\dots=0 \\ \varphi_3=c_3+l_3\cot(\mathrm{Z}_3-\mathrm{B}l_3)+c'_3+l_3\cot(\mathrm{Z}'_3-\mathrm{B}l_3)\dots\dots\dots\dots\dots=0 \\ \varphi_4=c_2+l_2\cot(\mathrm{Z}_2-\mathrm{B}l_2)+c_3+l_3\cot(\mathrm{Z}_3-\mathrm{B}l_3)+c'_1+l_1\cot(\mathrm{Z}'_1-\mathrm{B}l_1)=0\ , \end{cases}$$

e tra le erronee si avranno le altre relazioni

$$h_1 + h'_1\dots\dots = n_1$$
$$h_2 + h'_2\dots\dots = n_2$$
$$h_3 + h'_3\dots\dots = n_3$$
$$h_2 + h_3 + h'_1 = n_4\ :$$

cioè

$$(3)\dots\begin{cases} c_1+l_1\cot(z_1-\beta l_1)+c'_1+l_1\cot(z'_1-\beta l_1)\dots\dots\dots\dots\dots\dots=n_1 \\ c_2+l_2\cot(z_2-\beta l_2)+c'_2+l_2\cot(z'_2-\beta l_2)\dots\dots\dots\dots\dots\dots=n_2 \\ c_3+l_3\cot(z_3-\beta l_3)+c'_3+l_3\cot(z'_3-\beta l_3)\dots\dots\dots\dots\dots\dots=n_3 \\ c_2+l_2\cot(z_2-\beta l_2)+c_3+l_3\cot(z_3-\beta l_3)+c'_1+l_1\cot(z'_1-\beta l_1)=n_4\ : \end{cases}$$

ove le n esprimono le contraddizioni che derivano dagli errori delle z e delle β. Che se nella prima delle (2) diamo a Z, e B, gli accrescimenti $d\mathrm{Z}$ e $d\mathrm{B}$, si avrà

$$d\varphi_1 = -\frac{l_1 d\mathrm{Z}_1}{\mathrm{sen}^2(\mathrm{Z}_1-\mathrm{B}l_1)} - \frac{l_1 d\mathrm{Z}'_1}{\mathrm{sen}^2(\mathrm{Z}'_1-\mathrm{B}l_1)} + \frac{l_1^2 d\mathrm{B}}{\mathrm{sen}^2(\mathrm{Z}-\mathrm{B}l_1)} + \frac{l_1^2 d\mathrm{B}}{\mathrm{sen}^2(\mathrm{Z}'_1-\mathrm{B}l_1)}.$$

Ma la Geodosia tra Z_1, Z'_1 e B ci offre la relazione $Z_1 + Z'_1 - 2Bl_1 = 180°$, dunque $\text{sen}(Z_1 - B'_1) = \text{sen}(Z'_1 - Bl_1)$: che anzi nel caso nostro essendo Z_1 e Z'_1 prossimi a $90°$, giacchè i punti son poco differenti di livello, possiam ritenere $\text{sen}^2(Z_1 - Bl_1) = 1$, e $\text{sen}^2(Z'_1 - Bl_1) = 1$, ed avere perciò $d\varphi_1 = -l_1 dZ_1 - l_1 dZ'_1 + 2l_1^2 dB$.

In questa equazione poi è facile osservare che $d\varphi_1$ corrisponde esattamente ad n_1, e dZ_1, dZ'_1 e dB esprimono rispettivamente le correzioni che debbono subire le Z e B per divenire esatte; dunque, procedendo sulle altre equazioni (2) come sulla prima e cambiando i segni delle correzioni, si avranno le seguenti *equazioni di condizione*.

$$(4)\cdots\begin{cases} n_1 - l_1 dZ_1 - l_1 dZ'_1 + 2l_1^2 dB \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\ n_2 - l_2 dZ_2 - l_2 dZ'_2 + 2l_2^2 dB \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\ n_3 - l_3 dZ_3 - l_3 dZ'_3 + 2l_3^2 dB \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\ n_4 - l_2 dZ_2 - l_3 dZ_3 - l_1 dZ'_1 + (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) dB = 0 \end{cases}$$

Ma per la natura di B devesi nel caso nostro riguardare dB come costante, dunque se differenziamo le (4) in tale supposizione si avrà

$$\begin{aligned} -l_1\delta dZ_1 - l_1\delta dZ'_1 \ldots\ldots\ldots &= 0 \\ -l_2\delta dZ_2 - l_2\delta dZ'_2 \ldots\ldots\ldots &= 0 \\ -l_3\delta dZ_3 - l_3\delta dZ'_3 \ldots\ldots\ldots &= 0 \\ -l_2\delta dZ_2 - l_3\delta dZ_3 - l_1\delta dZ'_1 &= 0\ ; \end{aligned}$$

e se le prime tre di queste equazioni sono moltiplicate ordinatamente per i fattori indeterminati A, C, D si avranno le

$$\begin{aligned} -Al_1\delta dZ_1 - Al_1\delta dZ'_1 &= 0 \\ -Cl_2\delta dZ_2 - Cl_2\delta dZ'_2 &= 0 \\ -Dl_3\delta dZ_3 - Dl_3\delta dZ'_3 &= 0\ , \end{aligned}$$

che paragonate all' equazione del minimo

$$(5)\cdots\quad dZ_1\delta dZ_1 + dZ'_1\delta dZ'_1 + dZ_2\delta dZ'_2 + dZ'_2\delta dZ'_2 + dZ_3\delta dZ_3 + dZ'_3\delta dZ'_3 = 0$$

si avrà

$$(6)\cdots\begin{cases} dZ_1 = -Al_1 \quad : \quad dZ'_1 = -Al_1 \\ dZ_2 = -Cl_2 \quad : \quad dZ'_2 = -Cl_2 \\ dZ_3 = -Dl_3 \quad : \quad dZ'_3 = -Dl_3 \end{cases}$$

i quali valori sostituiti nella (4), ci daranno le *equazioni normali* qui registrate

$$(7)\cdots\begin{cases} n_1 + Al_1^2 + Al_1^2 + 2l_1^2 dB \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\ n_2 + Cl_2^2 + Cl_2^2 + 2l_2^2 dB \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\ n_3 + Dl_3^2 + Dl_3^2 + 2l_3^2 dB \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\ n_4 + Al_1^2 + Cl_2^2 + Dl_3^2 + (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) dB = 0. \end{cases}$$

Ove si vede che la quistione è ridotta a determinare, per mezzo delle quattro ultime equazioni, il valore di A, C, D, dB, e, introducendo nelle (6) i valori di A, C, D, ad ottenere le correzioni δZ_1, $\delta Z'_1$, δZ_2, $\delta Z'_2$, δZ_3, $\delta Z'_3$, oltre dB già determinato.

Adunque noi con questo metodo, il quale unicamente manca di applicazione, possiam conoscere in ogni triangolo della rete, non solo l'esatto coefficiente di refrazione che gli conviene nelle diverse condizioni di temperatura e pressione atmosferica media avuto luogo in ore e giorni diversi, ma anche l'errore corrispondente delle misure zenitali contemporanee; cosicchè ponendo insieme tutte le osservazioni possiam dedurre

1.° il coefficiente di refrazione medio che corrisponde ad una data temperatura e pressione atmosferica; la qual cosa sarà utilissima nelle livellazioni importanti, onde ottener differenze di livello possibilmente esatte da misure zenitali non contemporanee coordinate ad osservazioni termometriche e barometriche [1]:

2.° un coefficiente di refrazione medio mensile da applicarsi a misure zenitali di minore importanza non accoppiate ad osservazioni termometriche e barometriche:

3.° una livellazione barometrica, la quale sarebbe utile se non altro per apprezzare il grado di esattezza, che un lavoro di tal natura può raggiungere in paragone di un altro geodetico:

4.° le variazioni degli angoli di refrazione agli estremi di ogni raggio visuale, non solo deducendole dalle misure zenitali, ma anche dalle osservazioni termometriche e barometriche:

5.° le differenze di livello tra punto e punto colla maggiore esattezza possibile:

6.° l'error medio che affetta una differenza di livello dedotta da un altra sino all'ultima: ciò che sarà per noi assai importante, giacchè ci farà giudicare se la livellazione eseguita con i prescritti metodi possa giungere all'esattezza necessaria, ed ecco in qual modo.

[1] È utile notare due cose; una, che in queste operazioni potrebbero esser vantaggiosi i termometri e barometri metallici per la facilità del trasporto; l'altra, che le osservazioni de' barometri e termometri non recano all'operatore niuno impaccio potendo esser affidate all'aiutante incaricato degli eliscopii.

Per le considerazioni antecedenti noi già abbiam conosciuto il valore di **B**, dunque adottandolo nella serie di che ci occupiamo, riguarderemo d'ora in poi **B** come costante e sarà

$$
(8)\cdot\cdot\left\{\begin{array}{l|l|l|l}
\frac{d\varphi_1}{dZ_1}=a_1=-l_1 & \frac{d\varphi_2}{dZ_1}=b_1=\,.\,.\,0 & \frac{d\varphi_3}{dZ_1}=c_1=\,.\,.\,0 & \frac{d\varphi_4}{dZ_1}=d_1=\,.\,.\,0 \\
\frac{d\varphi_1}{dZ'_1}=a_2=-l_1 & \frac{d\varphi_2}{dZ'_1}=b_2=\,.\,.\,0 & \frac{d\varphi_3}{dZ'_1}=c_2=\,.\,.\,0 & \frac{d\varphi_4}{dZ'_1}=d_2=-l_1 \\
\frac{d\varphi_1}{dZ_2}=a_3=\,.\,.\,0 & \frac{d\varphi_2}{dZ_2}=b_3=-l_2 & \frac{d\varphi_3}{dZ_2}=c_3=\,.\,.\,0 & \frac{d\varphi_4}{dZ_2}=d_3=-l_2 \\
\frac{d\varphi_1}{dZ'_2}=a_4=\,.\,.\,0 & \frac{d\varphi_2}{dZ'_2}=b_4=-l_2 & \frac{d\varphi_3}{dZ'_2}=c_4=\,.\,.\,0 & \frac{d\varphi_4}{dZ'_2}=d_4=\,.\,.\,0 \\
\frac{d\varphi_1}{dZ_3}=a_5=\,.\,.\,0 & \frac{d\varphi_2}{dZ_3}=b_5=\,.\,.\,0 & \frac{d\varphi_3}{dZ_3}=c_5=-l_3 & \frac{d\varphi_4}{dZ_3}=d_5=-l_3 \\
\frac{d\varphi_1}{dZ'_3}=a_6=\,.\,.\,0 & \frac{d\varphi_2}{dZ'_3}=b_6=\,.\,.\,0 & \frac{d\varphi_3}{dZ'_3}=c_6=-l_3 & \frac{d\varphi_4}{dZ'_3}=d_6=\,.\,.\,0
\end{array}\right.
$$

Or se tra due punti **A** o **C** esistesse la sola relazione

$$(9)\ldots\ldots\ H_1=\psi Z_1=l_1\cot(Z_1-Bl_1)$$

con facile procedimento otterremmo m error medio di h_1, conosciuto m_1 errore di z_1; di fatti nella equazione differenziale della (9) cioè

$$(10)\ \ldots\ldots\ dH_1=-\frac{l_1}{R''}dZ_1=\lambda dZ_1 \quad ^*.$$

Sostituiti ai differenziali gli errori m ed m_1, lo che è lecito, si avrebbe $mm=\lambda\lambda m_1 m_1$. Ma siffatto metodo sarebbe nel caso nostro poco esatto, giacchè siccome $H_1=-H'_1$, ed $H_2+H_3=-H_1$, siamo obbligati a considerare H_1 implicitamente come funzione di φ_1, φ_2, φ_3, φ_4; per la qual cosa volendo noi dare al di H_1 una forma generale dobbiamo esprimerla così

$$(11)\ \ldots\ldots\ H_1=\psi Z_1+k_1\varphi_1+k_2\varphi_2+k_3\varphi_3+k_4\varphi_4$$

ove le k esprimono coefficienti indeterminati che coll'applicare le correzioni svaniscono insieme alle φ; epperò differenziata la (11), l'equazione differenziale avrà la forma seguente

$$(12)\ \ldots\ldots\ dH_1=L_1 dZ_1+L'_1 dZ'_1\ \ldots\ldots\ L'_3 dZ'_3$$

* R'' si è introdotto per rendere l'equazione omogenea, e l'equazione è ridotta a tale fra la considerazione che $\text{sen}^2(Z-Bl_1)=1$

in cui si vede facilmente che

$$(13) \ldots\ldots \begin{cases} L_1 = \lambda_1 + a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3 + d_1k_4 \\ L'_1 = 0 + a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3 + d_2k_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L'_5 = 0 + a_6k_1 + b_6k_2 + c_6k_3 + d_6k_4 ; \end{cases}$$

e come

$$(LL) = (\lambda_1 + a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3 + d_1k_4)^2 + (0 + a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3 + d_2k_4)^2 + \ldots\ldots\ldots (0 + a_6k_1 + b_6k_2 + c_6k_3 + d_6k_4)^2 ;$$

così l'equazioni del minimo $\left[\frac{d(LL)}{dk_1}\right] = 0$, $\left[\frac{d(LL)}{dk_2}\right] = 0$, ... $\left[\frac{d(LL)}{dk_4}\right] = 0$ ci daranno

$$(14) \ldots \begin{cases} 0 = (a\lambda) + (aa)k_1 + (ab)k_2 + (ac)k_3 + (ad)k_4 \\ 0 = (b\lambda) + (ab)k_1 + (bb)k_2 + (bc)k_3 + (bd)k_4 \\ 0 = (c\lambda) + (ac)k_1 + (bc)k_2 + (cc)k_3 + (cd)k_4 \\ 0 = (d\lambda) + (ad)k_1 + (bd)k_2 + (cd)k_3 + (dd)k_4 \end{cases}$$

Ove essendo note a , b , c , d e λ dalle equazioni (8) e (9) , noi potrem conoscere le k, che sostituite nelle (13) ci daranno le L; onde introdotti gli errori medii in luogo dei differenziali sarà

$$mm = L_1L_1m_1m_1 + L'_1L'_1m_2m_2 \ldots\ldots L'_5L'_5m_6m_6 ,$$

e come le nostre osservazioni sono di egual esattezza , e quindi $m_1 = m_2 = m_3 = \ldots\ldots$ così sarà

$$(15) \ \ldots\ldots \ m = m_1 \sqrt{(LL)}.$$

Per venire al concreto applichiamo questi principii al caso nostro, e supponiamo nel 1.° triangolo che l'error medio di ogni distanza zenitale sia eguale ad $1''$, quantità che è nell' ordine delle nostre osservazioni , quando queste sieno eseguite con cura , buoni strumenti ecc.; e fingiamo $l_1 = 8957^{m}$, $l_2 = 9808^{m}$, $l_3 = 8599^{m}$. Avremo per l'equazioni (10) $\lambda = -\frac{l'}{R''} = -0,04343$, come pure per le (8)

$a_1 = -8957$	$b_1 = \ldots 0$	$c_1 = \ldots 0$	$d_1 = \ldots 0$
$a_2 = -8957$	$b_2 = \ldots 0$	$c_2 = \ldots 0$	$d_2 = -8957$
$a_3 = \ldots 0$	$b_3 = -9808$	$c_3 = \ldots 0$	$d_3 = -9808$
$a_4 = \ldots 0$	$b_4 = -9808$	$c_4 = \ldots 0$	$d_4 = \ldots 0$
$a_5 = \ldots 0$	$b_5 = \ldots 0$	$c_5 = -8599$	$d_5 = -8599$
$a_6 = \ldots 0$	$b_6 = \ldots 0$	$c_6 = -8599$	$d_6 = \ldots 0$

dunque l'equazioni (14) diverranno in tal caso

$$\begin{array}{llllll}
0= & +0{,}0004 & +1604583k_1 & * & * & +\ 802291k_4 \\
0= & * & * & +1923977k_2 & & +\ 961988k_4 \\
0= & * & * & * & +1478920k_3 & +\ 739460k_4 \\
0= & * & +802291k_1 & +\ 961988k_2 & +\ 739460k_3 & +2503739k_4
\end{array}$$

lo che ci darà

$$\begin{array}{lcl}
k_1=-0{,}0000029 & & L_1=-0{,}018 \\
k_2=-0{,}0000004 & \text{ed} & L'_1=+0{,}018 \\
k_3=-0{,}0000004 & & L_2=-0{,}004 \\
k_4=+0{,}0000008 & & L'_2=+0{,}004 \\
 & & L_3=-0{,}003 \\
 & & L'_3=-0{,}003
\end{array}$$

ed infine (LL) $=0{,}000349$, epperò supponendo nella (15) $m_1=1$, l'error medio, che affetta la differenza di livello tra **A** e **B**, sarà $m=0^{ps}$, 0186.

Che se riteniamo esser dodici triangoli ABC (*fig.* 2) presso a poco uguali quelli per cui si passa dal Tirreno all'Adriatico, e le differenze zenitali affette da un errore che non superi 1″, seguendo la linea ABD$\cdots$O, l'error medio dell'ultima quota derivata della prima e dipendente solo dalle distanze dallo zenit, sarà non maggiore di $M=0^{p}$, $0186\times 7=0^{p}$, 1302; altrettanto sarà seguendo la linea ACE$\cdots$0, e per la linea diagonale ABCD$\cdots$0 sarà 0^{p}, 2418.

Noi non abbiam parlato fin qui del modo di ridurre al minimo e di trovare gli errori della V specie, e del modo di apprezzare il loro influsso sulle differenze di livello; adunque diciamone qualche parola, però accennatamente, poichè questo argomento potrebbe esso solo formare il soggetto di molte pagine, ed a noi molto ci resta ancora a discorrere.

Supponiamo, come indicammo a principio, che la rete, la quale serve di fondamento alla livellazione tra i due mari, si costituisca di dodici triangoli ABC, BCD ...... MNO (*fig.* 2). Il miglior modo che ci si offre, onde menomare gli errori degli angoli ed in conseguenza dei lati, è quello di misurare accuratamente tre piccole basi [1]: una nel mezzo, a mò d'esempio GH,

[1] Basterebbe che le basi fossero lunghe di un miglio, purchè esse sieno congiunte alla rete convenientemente.

e due altre AB, NO quanto più si può verso gli estremi; poichè di tal maniera, per determinare gli errori, noi avremo dodici equazioni di 2^{da} classe, le quali risultano dalla condizione che gli angoli di ciascun triangolo corretti dello eccesso sferico uguaglino la somma di 180°, e due equazioni di 3^a classe, che derivando dalle tre basi, che chiamo N, N', N'', saranno

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{AB}{GH}=\frac{AB}{BC}\times\frac{BC}{CD}\times\frac{CD}{DE}\times\frac{DE}{FE}\times\frac{EF}{FG}\times\frac{FG}{GH}=\frac{N}{N'}= \\ \frac{\text{sen}BCA}{\text{sen}BAC}\times\frac{\text{sen}BDC}{\text{sen}CBD}\times\frac{\text{sen}CED}{\text{sen}DCE}\times\frac{\text{sen}DFE}{\text{sen}EDF}\times\frac{\text{sen}EGF}{\text{sen}FEG}\times\frac{\text{sen}FHG}{\text{sen}GFH}, \\ \frac{GH}{NO}=\frac{GH}{HI}\times\frac{HI}{IK}\times\frac{IK}{KL}\times\frac{KL}{LM}\times\frac{LM}{MN}\times\frac{MN}{NO}=\frac{N'}{N''}= \\ \frac{\text{sen}HIG}{\text{sen}HGI}\times\frac{\text{sen}HKI}{\text{sen}IHK}\times\frac{\text{sen}ILK}{\text{sen}KIL}\times\frac{\text{sen}KML}{\text{sen}LKM}\times\frac{\text{sen}MNL}{\text{sen}MLN}\times\frac{\text{sen}MON}{\text{sen}NMO} \end{array}\right.$$

Epperò con i metodi di compensazione conosciuti, dalle quattordici equazioni noi possiamo dedurre gli errori degli angoli orizzontali ABC, BCA ..., e l'error medio dei lati. Ora per non dilungarci, se ammettiamo che i calcoli ci dieno per error medio del primo lato $AC=l_2$, la quantità μ, l'influsso di tal errore sulla differenza di livello tra A e C sarà con bastante esattezza... $\frac{\mu h_2}{l_2}=\nu$.
Per la qual cosa supposto $\mu=0^{rs},1$ (lo che è veramente molto per un lavoro eseguito con estrema cura) ed $h_2=50^{r},0$; $l_2=8000^{r}$; l'error medio che può affettare la differenza di livello tra A e C sarà $\nu=0,0006$: cosicchè, fingendo uguali a μ tutti gli errori dei lati dal primo sino all'ultimo punto della rete, l'error medio dell'ultima quota per l'influenza degli errori dei lati si accresce solo di $0^{r},0042$ seguendo le linee laterali, e di 0,0078 seguendo le diagonali. Epperò, riunendo gli errori delle distanze zenitali e quello de'lati, l'ultima quota, guardata come risultamento di tre linee di livellazione affette dagli errori accennati, avrà l'error medio $=0^{r},089$.

Finalmente restaci a parlare del modo come ottenere sulle osservazioni di maree errori minimi; del modo di determinarli, e di apprezzare il loro influsso sulla livellazione di cui ci occupiamo. Laplace ha fatto vedere nella sua Meccanica Celeste che il livello medio delle maree equinoziali può riguardarsi quasi esente dalla

influenza luni-solare, ond' è che alcuni propongono lo studio delle maree nel tempo degl' equinozii per dedurre la superficie media di livello. Però anche ammesso che il principio di Laplace fosse rigorosamente esatto, ciò che l' illustre scrittore non ha inteso di dire, non sempre può tornar facile di osservare una marea equinoziale per due cause:

1.° perchè nei mari chiusi qual' è il Mediterraneo, come la differenza tra le basse ed alte maree non eccede qualche piede, così essa in talune posizioni della luna è così insensibile che un leggiero vento impedisce di misurarne con esattezza le leggi:

2.° perchè se in uno degli equinozii il mare trovasi tempestoso si deve attendere il seguente per osservar la marea.

Adunque tal metodo non è nè rigoroso nè utile, e merita preferenza quello di studiar le maree sezige equinoziali, le quali presentando gran differenza tra le basse ed alte, fan sì che l' influsso degli errori di osservazione sieno piccoli, e che queste possano eseguirsi in qualunque mare chiuso senza inconveniente. Anzi limitandole a 2 sezige prima e 2 dopo ciascuno di due successivi equinozii, si può ottenere un grado di esattezza sufficiente.

Ora ammesso che nella quistione di cui ci occupiamo vogliasi adottare il metodo delle osservazioni sezigiali, noteremo che, ottenuta la quantità per cui l' alta marea si solleva sul livello medio delle acque in una sezige, se ripetesi in un' altra lo stesso procedimento, troveremo che essendo cambiate le posizioni del sole e della luna, l' altezza del mare sarà diversa; anzi nè la prima nè la seconda sarà quella che avrebbe il mare nel tempo dell' equinozio a media distanza lunare, quantità costante per ciascun luogo, e che noi possiamo ottenere per le seguenti considerazioni. Si chiami a l' altezza della marea equinoziale a media distanza lunare; indichi A l' altezza dell' alta marea sezigia osservata sul livello medio del giorno; sia finalmente x tal quantità che $\frac{A}{x}=a$, egli è chiaro che se possiam procurarci x ed A, dedurremo immediatamente il valore di a. Ora il valore di x ce l' offre l' equazione $x=Ci^3\cos^2 D+C'P^3\cos^2 D'$ improntata dalla Meccanica Celeste di Laplace ove D e D' indicano rispettivamente la declinazione del Sole e della Luna nell' istante della sezige; P la paral-

basse orizzontale della luna; *i* l' unità divisa pel raggio vettore della terra; C, C' due quantità costanti, sicchè $\log C = 9 \cdot 38987$, $\log C' = 9 \cdot 26454$; adunque per determinare *a* dobbiam conoscere prima A.

Si sa che il moto della terra, l'inerzia delle acque ed altre cause non ancor definite portano un ritardamento di 36^h al fenomeno della marea, ossia altramente detto che la marea di un giorno qualunque vien determinata dalle condizioni in cui il Sole e la Luna si trovavano 36^h prima, e che un tal fatto può riguardarsi costante in tutta l' Europa. Oltre a ciò è noto come le coste, presentandosi in diverso modo al viaggio della marea, producono un altro ritardo locale, che dicesi *Stabilimento del Porto*, e che indicheremo con S. Adunque l' alta marea sezigia avviene $36^h + S^h$ dopo la sezige, epperò, ritenendo che il livello medio sia determinato dall' elevazione dell' alta marea sulle due basse circostanti [1], e che l'intervallo di tempo sia poco maggiore di 6^h, ne risulta che, conosciuto prossimamente S, potrem dedurre l' ora dell' alta marea con approssimazione, e quella delle due basse maree circostanti, lo che tornerà utile a chiudere in una serie di osservazioni i tre punti di flesso della curva di marea e ad ottenere il livello medio del mare ed anche A.

Ora noi possiamo conoscere prossimamente S ricavando l'ora M in cui avviene l' alta marea in qualche giorno anteriore alla sazige; di fatti noi abbiamo all' uopo la formola $S = M - L - C$, ove L è l' ora del transito anteriore più prossimo della luna al meridiano del luogo, C una correzione data dalla tavola di Bernulli. Però dobbiamo notare che la determinazione del livello medio e di A non deve derivarsi da tre serie isolate intorno ai punti di flesso della curva di marea, poichè ciò darebbe risultamenti

[1] Molti derivano il livello medio del mare ponendo in relazione l' alta marea, e l' anteriore o posteriore ad essa con la bassa intermedia; ciò non mi sembra esatto, poichè sia (*fig.* 3) *ab* l' alta marea tra le basse circostanti *e* ed *f*: i punti *e* ed *f*, essendo dipendenti da condizioni quasi uguali, si troveranno sensibilmente allo stesso livello ed $\frac{ab}{2}$ esprimerà il livello medio del mare, quantità sempre maggiore di $\frac{cd+ab}{4}$.

affetti da grandi errori accidentali; ma bisogna osservare l'intero periodo della marea, cioè per circa 25^h, giacchè così facendo si ha il mezzo di depurare le osservazioni da siffatti errori mediante il calcolo di compensazione.

La marea è un fenomeno periodico, il quale ricomparisce quasi sotto le stesse condizioni dopo lo spazio di circa $24^h, 50^m$; ciò posto tale fatto può essere assoggettato alla formola generale dei fenomeni periodici data da Bessel, la quale è

$$(a) \ldots\ldots \quad y = p + p'\cos z + q'\operatorname{sen} z + p''\cos 2z + q''\operatorname{sen} 2z \ldots\ldots$$

ove y rappresenta l'altezza osservata; z l'ora corrispondente ridotta in gradi della circonferenza chiusa dal periodo; $p, p', q' \ldots$ sono le quantità da determinarsi dipendentemente dal flesso lunisolare ed altre cause concorrenti. Ora considerato il periodo come una intiera circonferenza, ossia eguale a $360°$, se si prendono gl'intervalli tutti uguali tra loro, summultipli della circonferenza, sicchè sommati insieme a partire da 0 formano $360°$, i valori di $p, p', q' \ldots$ saranno i seguenti

$$(b) \ldots\ldots \begin{cases} p = \frac{1}{n}(\alpha + \alpha' \ldots\ldots + \alpha'' \ldots\ldots + \alpha''' \ldots\ldots \alpha^{n-1}) \\ p' = \frac{2}{n}(\alpha + \alpha'\cos z + \alpha''\cos 2z + \alpha'''\cos 3z + \ldots) \\ q' = \frac{2}{n}(\quad \alpha'\operatorname{sen} z + \alpha''\operatorname{sen} 2z + \alpha'''\operatorname{sen} 3z + \ldots) \\ p'' = \frac{2}{n}(\alpha + \alpha'\cos 2z + \alpha''\cos 4z + \alpha'''\cos 6z + \ldots) \\ q'' = \frac{2}{n}(\quad \alpha'\operatorname{sen} 2z + \alpha''\operatorname{sen} 4z + \alpha'''\operatorname{sen} 6z + \ldots) \end{cases}$$

ove $\alpha \ldots$ rappresentano i valori di y corrispondenti agli archi $0, z, 2z \ldots$, ed n il numero delle volte che l'arco z è contenuto in $360°$.

Applichiamo questi principii all'esempio di una marea da noi osservata [1], ma prima di tutto notiamo due cose importanti.

1.° Il periodo di una marea essendo di circa $24^h \cdot 50^m$ noi per comodità di calcolo lo supporremo di $24^h \cdot 48^m$, lo che non mena

[1] Noi qui non parleremo di avvertenza da usarsi circa la scelta del luogo di osservazione ed altro, perchè supponiamo gli operatori forniti delle cognizioni generali che riguardano questo argomento; però

ad errore apprezzabile; dunque se 360° corrispondono a $24^h \cdot 48^m$, 90° corrispondono a $6^h \cdot 12^m$, e $7° \cdot 30'$ corrispondono a 31^m; per la qual cosa, se noi facciamo le correzioni ad intervalli di 31^m, incominciando un' ora prima del 1° minimo, avremo a notare 48 osservazioni di altezza ed i tempi corrispondenti, onde i calcoli ci torneranno molto agevoli.

2.° Siccome gl'intervalli di tempo sono a 31^m di distanza l'uno dall' altro, così per fare che ciascuna osservazione abbia un valore più probabile, esente per quanto è possibile da errori prodotti dal vento, o d'altra causa accidentale, noi ogni volta che sarem giunti al 31^m faremo quattro osservazioni e ne dedurremo un medio. Ciò premesso le osservazioni così ottenute sieno le seguenti

Tempo	Altezza	Tempo	Altezza	Tempo	Altezza	Tempo	Altezza	Tempo	Altezza
$15^h,00^m$	$1^{pl},089$	$20^h,10^m$	$1^{pl},800$	$1^h,20^m$	$1^{pl},670$	$6^h,30^m$	$1^{pl},277$	$11^h,40^m$	$1^{pl},998$
31	0 ,979	41	2 ,003	51	1 ,511	7 ,01	1 ,414	12 ,11	1 ,912
16 ,02	0 ,925	21 ,12	2 ,102	2 ,22	1 ,360	32	1 ,558	42	1 ,809
33	0 ,981	43	2 ,164	53	1 ,226	8 ,03	1 ,698	13 ,13	1 ,694
17 ,04	1 ,062	22 ,14	2 ,192	3 ,24	1 ,108	34	1 ,828	44	1 ,559
35	1 ,171	45	2 ,132	55	1 ,014	9 ,05	1 ,938	14 ,15	1 ,401
18 ,06	1 ,303	23 ,16	2 ,190	4 ,26	0 ,935	36	2 ,022	46	1 ,247
37	1 ,449	47	2 ,016	57	0 ,982	10 ,07	2 ,085	15 ,17	1 ,109
19 ,08	1 ,602	0 ,18	1 ,915	5 ,28	1 ,054	38	2 ,104		
39	1 ,751	49	1 ,802	59	1 ,154	11 ,09	2 ,062		

Ove, se dietro ciò che si è detto, convertiamo il tempo in parti della circonferenza che rappresenta il periodo a partire da 0 sarà

$$\begin{cases} z=0 \\ \alpha=1,089 \end{cases} \begin{cases} z=7°.30' \\ \alpha'=0,979 \end{cases} \begin{cases} 2z=15°.00' \\ \alpha''=0,925 \end{cases} \begin{cases} 3z=22°.30' \ldots \\ \alpha'''=0,981 \ldots \end{cases} \begin{cases} (n-1)z=252°.30' \\ \alpha^{n-1}=1,109 \end{cases}$$

dai quali elementi con calcolo non molto lungo potrà ottenersi $p=1,5702$; $p'=-0,0154$; $q'=+0,0383$; $p''=-0,4653$; $q''=-0,2901$ onde l' equazione della curva di marea sarà

$$(c)..y=1,5702-0,0154\cos z+0,0383\,\mathrm{sen}\,z-0,4653\cos 2z-0,2901\,\mathrm{sen}\,2z,$$

nella quale sostituiti a z tutti i valori da 0 sino a 252°.31', si avranno i corrispondenti valori delle y, altezze compensate ri-

non manchiamo di avvertire che l'idrometro dovrebbe essere di quelli a due diaframmi e lungo circa dodici palmi, perchè è dimostrato che a tale profondità la mobilità delle acque diminuisce di $\frac{1}{633}$.

sultanti dal calcolo, che messe a parallelo con le altezze osservate daranno il quadro seguente

Altezze osservate	Altezze calcolate	Differenze	Altezze osservate	Altezze calcolate	Differenze	Altezze osservate	Altezze calcolate	Differenze	Altezze osservate	Altezze calcolate	Differenze
$1^{m},089$	$1^{m},0894$	$+0^{m},0004$	$2^{m},102$	$20^{m},738$	$-0^{m},0282$	$1^{m},108$	$1^{m},1203$	$+0^{m},0123$	$2^{m},022$	$1^{m},9972$	$-0^{m},0248$
0,979	1,0354	+0,0564	2,164	2,1347	—0,0293	1,014	1,0563	+0,0423	2,085	2,0547	—0,0303
0,925	1,0171	+0,0922	2,192	2,1593	—0,0327	0,935	1,0271	+0,0921	2,104	2,0773	—0,0267
0,981	1,0365	+0,0555	2,152	2,1457	—0,0063	0,982	1,0355	+0,0535	2,062	2,0631	+0,0011
1,062	1,0922	+0,0302	2,190	2,1950	+0,0050	1,054	1,0804	+0,0264	1,998	2,0132	+0,0152
1,171	1,1807	+0,0097	2,016	2,0106	—0,0054	1,154	1,1585	+0,0045	1,912	1,9310	+0,0190
1,303	1,2963	—0,0067	1,915	1,8983	—0,0167	1,277	1,2639	—0,0131	1,809	1,8223	+0,0133
1,449	1,4314	—0,0176	1,802	1,7655	—0,0365	1,414	1,3894	—0,0246	1,694	1,6945	+0,0005
1,602	1,5772	—0,0248	1,670	1,6212	—0,0488	1,558	1,5262	—0,0318	1,559	1,5562	—0,0028
1,751	1,7236	—0,0274	1,511	1,4752	—0,0358	1,698	1,6646	—0,0334	1,401	1,4174	+0,0164
1,890	1,8611	—0,0289	1,360	1,3371	—0,0229	1,828	1,7951	—0,0329	1,247	1,2875	+0,0405
2,009	1,9805	—0,0285	1,226	1,2162	—0,0098	1,938	1,9085	—0,0295	1,109	1,1756	+0,0666

Or ci conviene trovare i massimi e minimi di questa curva e le corrispondenti ore; e per ottener ciò nell'equazione (c) facciasi $-0,0154\cos z + 0,0383\text{sen} z = A\text{sen}(B + z)$, essendo A e B quantità da determinarsi. Se sviluppiamo il secondo membro si avrà .... $-0,0154\cos z + 0,0383\text{sen} z = A\text{sen}B\cos z + A\cos B\text{sen} z$, e quindi sarà

$$-0,0154 = A\text{sen}B\text{ , e } 0,0383 = A\cos B\text{ ,}$$

d'onde

$$A = \frac{-0,0154}{\text{sen}B} = \frac{+0,0383}{\cos B}\text{ , e } \tan gB = \frac{-0,0154}{0,0383}\text{ ,}$$

$$\text{e } B = 158°\cdot06'\text{ , } A = -0,0413.$$

Parimente se si fa $-0,4653\cos 2z - 0,2901\text{sen}2z = A'\text{sen}(B'+2z)$, con lo stesso procedimento si ottiene $B'=58°,04'$ ed $A'=-0,5484$; dunque l'equazione (c) potrà mettersi sotto questa forma più semplice (d)... $y = 1,5702 - 0,0413\text{sen}(158°.06' + z) - 0,5484\text{sen}(58°.04' + 2z)$ Da questa equazione poi dobbiamo ricavare i massimi ed i minimi di che abbisogniamo; adunque se la differenziamo e facciamo il coefficiente differenziale eguale a zero si avrà
(e)....... $-0,0413\cos(158°\cdot06' + z) - 0,5484\cos(58°\cdot04' + 2z) = 0$, equazione, che non potendosi risolvere direttamente impiegheremo il metodo di approssimazione; così se si richiede l'ora z di un massimo o minimo, noi nell'equazione introdurremo quella approssimata che viene offerta dalle osservazioni, che chiamo z_1, e faremo $z = z_1 + \theta$, ove θ è una piccola quantità da determinarsi nel modo che segue.

Porremo l'equazione (e) sotto la forma generale

$$-a\cos(b + z) - c\cos(d + 2z) = 0\text{ ,}$$

ove se a z si sostituisca il suo valore $z_1 + \theta$, avremo

$$-a\cos(b + z_1 + \theta) - c\cos(d + 2z_1 + 2\theta) = 0\text{ ,}$$

nella quale fatto $b + z_1 = C$, e $d + 2z_1 = D$ si avrà

$$-a\cos(C + \theta) - c\cos(D + 2\theta) = 0\text{ ,}$$

e sviluppando nella considerazione che θ è una piccola quantità, si avrà in fine

$$(f)\ \ldots\ \theta = \frac{a\cos C + c\cos D}{a\,\text{sen}C + 2c\,\text{sen}D}.$$

Ottenuto a questo modo θ si avrà z ossia l'ora del massimo o minimo richiesto: che se poi tale procedimento si ripete per ciascuno dei massimi e minimi si avranno i quattro valori dei

tempi in cui i fenomeni hanno luogo, e possono trovarsi le corrispondenti ordinate per mezzo di una delle equazioni (c), (d).

Applichiamo questi principii al nostro esempio e facciamoci a ricercare il 1.° massimo. Qui si ha che $z_1 = 105°\cdot 0'$, quindi nella equazione (e) posto in vece di z_1 il suo valore $z_1+\theta$ si avrà
$$-0,0413\cos(158°\cdot06'+105°\cdot0'+\theta)-0,5481\cos(58°\cdot4'+210°\cdot0'+2\theta)=0,$$
ossia
$$-0,0413\cos(263°\cdot6'+\theta)-0,5481\cos(268°\cdot4'+2\theta)=0$$
nella quale, essendo $C=263°\cdot6'$; $D=268°\cdot4'$; $a=0,0413$; $c=0,5484$, si ricaverà $\theta=1°\cdot11'$, e sarà quindi $z=106°\cdot11'$, al quale tempo corrisponderà l'ordinata $2^{p},1596$, come si potrà vedere per mezzo di una delle equazioni (c) o (d). Con questo metodo si trova l'altro massimo, ed i due minimi qui appresso registrati.

Massimi.	z in gradi.	z in tempo.	x.
1.° Minimo.	15°·00′	$16^h\cdot02^m$	1^{Pi},0171
1.° Massimo.	106 ·11	22 ·19	2 ,1596
2.° Minimo.	198 ·07	4 ·49	1 ,0260
2.° Massimo.	285 ·44	10 ·41	2 ,0774

Or si tratta di trovare il livello medio delle acque in questa condizione; epperò si prenderà il medio tra il 1.° e 2.° minimo che sarà 1^{Pi},0215, poichè il medio tra questa quantità ed il 1.° massimo, che corrisponde all'alta marea sezige, ci darà il livello medio uguale ad 1^{Pi},5905. Però se riflettiamo questo è il livello medio del mare nell'occasione della sezige, ma a noi fa d'uopo quello equinoziale a media distanza lunare; quindi per ottenerlo bisogna trovare A ossia l'altezza della marea sezigia sul livello medio del giorno che sarà 0^{Pi},4691; dividere questo valore per $x=0^{Pi},938$ [1], ed avremo $a=0^{Pi},50$: valore che sarebbesi ot-

[1] Si noti che nel dì dell'osservazione della serie recata in esempio era $D=7°.48'.00''$; $D'=8°.23'.50''$; $P=56'.33''$; $\log i=9.\ 9613$. Con questi elementi si ricaverà che la 1.ª parte del valore di x è 0,235 la seconda è 0,703 e sommati tuttaddue tali parti si avrà $x=0,938$.

tenuto direttamente se si fosse osservata la marea equinoziale a media distanza lunare. Qui poi si vede che la differenza tra a ed A è molto piccola perchè la luna per avventura si trova quasi a media distanza dalla terra ; ma potrebbe essere apogea o perigea ; e nel 1.° caso A sarà molto minore di a, e nel secondo caso avverrà il contrario.

Abbiam fatto vedere come per l'osservazione di una marea sezigia si trova il valore di a, ed è facile concepire che ripetendo le stesse osservazioni in altri di sezigi si troveranno per a altri valori, che riuniti al primo e presone il medio si avrà quello più probabile.

Ritornando poi alle osservazioni di marea recate in esempio si troverà mercè il calcolo di compensazione che l'errore, il quale può affettare il livello medio del mare dedotto da 8 serie equinoziali di uguale esattezza non supera $0^m,001$, quantità che può quasi trascurarsi di fatti.

La differenza di livello tra il Tirreno e l'Adriatico costituendosi di tre quantità ; cioè dalla differenza di livello tra il primo e l'ultimo punto della rete; di quella tra il livello medio del Tirreno ed il primo punto ; e dell'altra tra il livello medio dell'Adriatico e l'ultimo punto ; se chiamiamo u la differenza di livello dei due mari e per ordine t_1, t_2, t_3 le tre parti che la compongono ; sarà $u = t_1 + t_2 + t_3$. Ora, supposto che le osservazioni di maree fatte in ciascuno dei due mari abbiano lo stesso error medio $0^m,001$ e che tale errore si accresca di altrettanto per lo collegamento del punto estremo della rete al mare sottoposto, l'error medio di t_2 come pure quello di t_3 sarà $0^m,002$ ed applicando la formola conosciuta $m = \sqrt{m_1m_1 + m_2m_2 + m_3m_3}$ (ove m esprime l'error medio di u, ed m_1, m_2, m_3 gli errori rispettivi di t_1, t_2, t_3), l'error medio della differenza di livello tra il Tirreno e l'Adriatico sarà

$$m = \sqrt{0,007921 + 0,000004 + 0,000004} = 0^m,089$$

Per lo che siamo in diritto di conchiudere che se la differenza di livello tra i due mari non è maggiore di $0^m,089$, come è molto probabile, essa non potrà sfuggire ai mezzi di ricerca da noi indicati.

Poniam termine a questo scritto facendo notare che, per far seguito ad un lavoro come quello indicato, tra i punti estremi

della linea di livellazione se ne dovrebbe scegliere un altro intermedio, conosciuto di distanza e visibile dagli altri due, ed in tutti e tre tali luoghi eseguire molte serie di osservazioni zenitali e meteoriche reciproche e contemporanee; affin di ottenere con due soli colpi la differenza di livello di due mari. Però come in tal caso gli angoli di refrazione sarebbero disuguali, così essi dovrebbero esser dedotti puramente dalle osservazioni meteoriche. Una livellazione poi eseguita a tal modo oltre di esser di verificazione, potrebbe offerire molte utili conseguenze.

Federigo Schiavoni.

Fig.ª 1.ª
C
A
B
Fig.ª 3.ª
a
c
d
e
b
f
Fig.ª 2.ª
N
O
L
M
I
K
G
H
E
F
C
D
A
B